

1.4.

1°. Une statistique est une fonction mesurable (c.-à-d. une variable aléatoire) des $X_1, \dots, X_n$ et qui ne dépend pas des paramètres.

$\Rightarrow$ toutes les VA sont des stats sauf les 3° et 4° qui dépendent respectivement de σ et de m .

2°. Modèle image de $\bar{X}$?

c'est une façon déguisée de demander $(\Omega, \mathcal{G}, P_{\bar{X}})$

$\bar{X}$ est une combinaison linéaire de VA gaussiennes $\perp$, elle est donc gaussienne

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \times n \times m = m$$

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \text{ par } \perp \text{ des } X_i$$

$$= \frac{1}{n^2} \times n \times \sigma^2 = \sigma^2/n \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{CP}(m, \frac{\sigma^2}{n})$$

le modèle image est

$$(\mathbb{R}; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}; \{ \mathcal{CP}(m; \frac{\sigma^2}{n}) ; (m, \sigma^2) \in \Theta \})$$

3°. Modèle image de $(\bar{X}, S^2)$

On demande la loi jointe de $\bar{X}$ et de S^2 , ça n'a rien d'évident car $\bar{X}$ et S^2 sont fonctions des $X_1, \dots, X_n$ et peuvent ne pas être $\perp$.

En fait, pour des VA gaussiennes la moyenne et la variance empiriques sont $\perp$ (c'est faux en général)

On va donc commencer par mg $\bar{X} \perp S^2$

a. Méthode 1: écrire S^2 en fonction de $Y_i = X_i - \bar{X}$

• $X_i - \bar{X} = (1 - \frac{1}{n})X_i + \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} X_j$
est une combinaison linéaire des coord. d'un vecteur gaussien
 $\Rightarrow Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ est un vecteur gaussien.

$$E[Y_i] = E[X_i] - E[\bar{X}] = m - m = 0$$

$$V(Y_i) = V(X_i - \bar{X}) = (1 - \frac{1}{n})^2 \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_i, Y_j) &= \text{cov}(X_i - \bar{X}, X_j - \bar{X}) \quad i \neq j \\ &= E[X_i X_j] - E[X_i \bar{X}] - E[X_j \bar{X}] + E[\bar{X}^2] \\ &= m^2 - 2(m^2 + \frac{\sigma^2}{n}) + (m^2 + \frac{\sigma^2}{n}) = -\frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

donc les $(Y_i)_i$ ne sont pas $\perp$, MAIS:
les $(Y_i)_i$ sont $\perp$ de $\bar{X}$. En effet:

$(Y_1, \dots, Y_n, \bar{X})$ est un vecteur gaussien (combinaison linéaire des coord. d'un vecteur gaussien). Par suite, $\bar{X} \perp$ des Y_i ssi $\text{cov}(Y_i, \bar{X}) = 0$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{cov}(Y_i, \bar{X}) &= \text{cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) \\ &= \text{cov}(X_i, \bar{X}) - V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0 \end{aligned}$$

• $S^2 = f(Y_i; i \in \mathbb{I})$ est donc $\perp$ de $\bar{X}$
 $S^2 \perp \bar{X}$ (c'est faux si X non gaussien!)

Autre méthode:

On isole $X_1 - \bar{X}$ dans la somme

$$X_1 = n(\bar{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i)$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=2}^n Y_i \right)^2 + \sum_{i=2}^n Y_i^2 \right] = f(Y)$$

$$b. \text{ Loi de } \Sigma = n \frac{S^2}{\sigma^2}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \Rightarrow \Sigma = \frac{n S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$$

Σ est la variance empirique biaisée

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} (X_i - \bar{X} + \bar{X} - m)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma^2} (X_i - \bar{X})^2 + \frac{1}{\sigma^2} (\bar{X} - m)^2 + \frac{1}{\sigma^2} (X_i - \bar{X})(\bar{X} - m) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{\sigma^2} S^2 + \frac{n}{\sigma^2} (\bar{X} - m)^2 + \frac{1}{\sigma^2} (\bar{X} - m) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \quad (*)$$

$$\bullet Z_i \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{CP}(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2 = 0$$

$$\bullet \text{ Soit } V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2 \text{ et } Z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$V = \frac{n}{\sigma^2} S^2 + Z^2 \text{ et } S^2 \perp Z \quad Z \sim \mathcal{CP}(0,1)$$

$$Z \sim \mathcal{CP}(0,1) \text{ et } V \sim \chi_n^2 \text{ car } \frac{X_i - m}{\sigma} \sim \mathcal{CP}(0,1) \perp$$

Par $\perp$ de V et Z^2 , $(*) \Rightarrow$

$$\varphi_V(t) = \varphi_Z(t) \times \varphi_{Z^2}(t)$$

$$\Rightarrow \varphi_Z(t) = \varphi_V(t) \div \varphi_{Z^2}(t) \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} \varphi_V(t) &= \mathbb{E}[e^{itV}] \\ &= \mathbb{E}[e^{it \sum (X_k - m)^2 / \sigma^2}] \\ &= (1 - 2it)^{-m/2} \text{ fonc. carac. } \chi_m^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_Z(t) = (1 - 2it)^{-(m-1)/2} \text{ qui est la f.c. d'une loi du } \chi_{m-1}^2 \text{ d.d.p.}$$

$$\Rightarrow \frac{mS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{m-1}^2$$

c. Modèle image de $(\bar{X}, S^2)$

• On sait que $\bar{X} \perp S^2$ il suffit donc de donner la loi de $\bar{X}$ et celle de S^2 .

$$\Sigma = \frac{mS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{m-1}^2 = \delta\left(\frac{m-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \delta(p, N)$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{\sigma^2}{m} \Sigma = t \Sigma \sim \delta\left(p, \frac{N}{t}\right) = \delta\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m}{2\sigma^2}\right)$$

• $\bar{X}$ et $S^2 \perp$; la loi du couple est donc $P \otimes Q$ avec $P \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{m})$

$$\Rightarrow Q \sim \delta\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m}{2\sigma^2}\right)$$

Le modèle image est:

$(X, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ avec:

- $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
- $\mathcal{H} = \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$
- $\mathcal{S} = \{P \otimes Q, (m, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times]0, \infty[\}$

4°. Loi de $T = \sqrt{m-1} \cdot \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sigma}}$

$$T = \left(\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{m}}} \right) \div \left(\frac{S^2}{\sigma^2(m-1)} \right)^{1/2}$$

$$Z \perp K \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1) \quad K \sim \chi_{m-1}^2$$

Par définition T suit une loi de Student à $m-1$ d.d.p.

$$T \sim SE(m-1)$$