

1°. Modèle image de $X_{(1)}$? de $X_{(n)}$?

- $F_{X_{(1)}}(x) = \mathbb{P}[X_{(1)} \leq x] = 1 - \mathbb{P}[X_{(1)} > x] = 1 - (1 - F(x))^n$ par iid des X_i
 $\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \{ \mathbb{P} / F_p(x) = 1 - (1 - F(x))^n \})$
- de $\hat{m}$, $F_{X_{(n)}}(x) = \mathbb{P}[X_{(n)} \leq x] = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[X_i \leq x] = F(x)^n$
 $\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \{ \mathbb{P} / F_p(x) = F(x)^n \})$ (indpce, iid)

2°. Def de $\hat{F}_m$? modèle image de $m \hat{F}_m(x)$?

- $\hat{F}_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{[X_i \leq x]} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{[X_i; +\infty[}(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{F}_m(x)$ est une VA ne dépendant que de $m, X_1, \dots, X_m$ et x .
- Par indépendance des X_i , $\sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{[X_i \leq x]}$ suit une loi binomiale de paramètre m et $p = \mathbb{P}[X_i \leq x] = F(x)$
 $m \hat{F}_m(x) \sim \mathcal{B}(m; F(x)) \Rightarrow (\mathbb{N}; \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{ \mathcal{B}(m; F(x)) \})$

3°. Loi de $X_{(i)}$?

- $X_{(i)}$ est la i ème statistique d'ordre de X :
 pour une réalisation $x_1, \dots, x_m$ de X , $\exists !$ permutation $\sigma \in \mathcal{P}_m$ /
 $x_{(i)} = x_{\sigma(i)} \quad \forall i = 1, \dots, m$ et $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(m)}$
 Les $x_{(i)}$ sont alors les réalisations du vecteur $X_{(i)} = (X_{(1)}, \dots, X_{(m)})$
- Si X suit une loi admettant une densité continue / à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors les inégalités sont strictes
 car $\mathbb{P}[X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(m)}] = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{i \neq j} [X_i = X_j])$
 $= 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{i \neq j} [X_i - X_j = 0]) \geq 1 - \sum_{i \neq j} \mathbb{P}[X_i - X_j = 0] = 1$
 en effet si X_i et X_j sont à densité continue, $X_i - X_j$ aussi (indépendance)
 donc $\forall i, j \quad \mathbb{P}[X_i - X_j = 0] = 0$.
- $F_{X_{(i)}}(x) = \mathbb{P}[X_{(i)} \leq x]$
 $[X_{(i)} \leq x] =$ "au moins i VA parmi les X_k sont $\leq x$ "
 Or, le nombre de VA inférieur ou égal à x parmi $X_1, \dots, X_m$ est exactement égal à $m \hat{F}_m(x) = \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{[X_i \leq x]}$
 Ainsi, $[X_{(i)} \leq x] = [m \hat{F}_m(x) \geq i]$ et $m \hat{F}_m(x) \sim \mathcal{B}(m, F(x))$
 $\Rightarrow F_{X_{(i)}}(x) = \mathbb{P}[m \hat{F}_m(x) \geq i] = \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} F(x)^k (1-F(x))^{m-k} \quad (\alpha)$

La densité de $X_{(i)}$ s'obtient en dérivant (a)

$$f_{X_{(i)}}(x) = \sum_{k=i}^m C_m^k \left[k f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{m-k} - (n-k) f(x) F(x)^k (1-F(x))^{m-k-1} \right]$$

$$= f(x) \sum_{k=i}^m k C_m^k F(x)^{k-1} (1-F(x))^{m-k} - f(x) \underbrace{\sum_{k=i}^{m-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} F(x)^k (1-F(x))^{m-k-1}}_{\sigma_2}$$

remplaçons k par $k-1$ dans σ_2

$$\sigma_2 = \sum_{k=i+1}^m \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{m-k} = \sum_{k=i+1}^m k C_m^k F(x)^{k-1} (1-F(x))^{m-k}$$

si $k=m$ le dernier terme est nul.

Finalement tous les termes s'annulent sauf le 1er :

$$f_{X_{(i)}}(x) = \underline{i C_m^i f(x) F(x)^{i-1} (1-F(x))^{m-i}}$$

• On rappelle que la densité jointe de $(X_{(1)}, \dots, X_{(m)})$ est

$$n! \cdot \frac{1}{n!} f(x_k) \mathbb{1}_{\Delta}(x)$$

f densité commune des X_i

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^m / x_1 < x_2 < \dots < x_m\}$$