

⚠ • expo: $\frac{\text{démont}}{1} + \frac{\text{homogène}}{2} + \frac{\text{vraisemblance}}{\text{pérec... } 3}$

1, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, détermine $X_i \neq i$ (va à densité AC^0)

$$\mathcal{M} = (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes m}, \{\mathbb{P}^{\otimes m}; (m, \sigma^2) \in \mathbb{N} \times]0, \infty[\})$$

$$dx = dx_1 \dots dx_n$$

$$\Rightarrow P^{\otimes m}(dx) = (2\pi\sigma^2)^{-m/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i - m)^2\right] dx$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + m^2 n - 2 \sum_{i=1}^n x_i m$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \times \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{m}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{m^2}{2\sigma^2} n$$

$$f(x) = \exp\left[-\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{m^2 n}{2\sigma^2}\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} T_2(x) + \frac{m}{\sigma^2} T_1(x)\right]$$

On peut donc poser $T_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i$; $T_2(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$; $\mathcal{N}_1(m, \sigma^2) = \frac{m}{\sigma^2}$; $\mathcal{N}_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$

$$\beta(\theta) = \beta(m, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{m^2 m}{2\sigma^2} \quad \text{et} \quad h(x) = 1$$

$\Rightarrow$ modèle exponentiel.

- Statistique canonique $T = (T_1, T_2) = (\sum_{i=1}^n x_i; \sum_{i=1}^n x_i^2)$
paramètre canonique: η avec

$$d(m, \sigma^2) = \left(\frac{m}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2} \right) = (d_1, d_2)$$

- $E[T] = (m, m; n(m^2 + \sigma^2))$

$$\text{Var}(T) = \begin{bmatrix} \text{Var } T_1 & \text{cov}(T_1, T_2) \\ \text{cov}(T_1, T_2) & \text{Var } T_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n\sigma^2 & "" \\ "" & "" \end{pmatrix}$$

$$\text{cov}(T_1, T_2) = \sum_{i,j} \text{cov}(x_i, x_j^2) = n \times \text{cov}(x, x^2)$$

$$= n \times (\mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2])$$

$$= m(3m\sigma^2 + m^3 - m\sigma^2 - m^3) = 2mm\sigma^2$$

$$\text{Var } T_2 = \mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2 = 3\sigma^4 + 6m^2\sigma^2 + m^4 - \sigma^4 - m^4 - 2m^2\sigma^2 \\ = (2\sigma^4 + 4m^2\sigma^2) m$$

Correct retrouver E et con à partir de $\beta(N)$

$$d = (d_1, d_2)$$

correct behavior (E et C) a priori on P(1)

$$N_1 = \frac{m}{q-2} \text{ et } N_2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \Rightarrow \sigma^2 = -\frac{1}{2N_2} \text{ et } m = -\frac{1N_1}{2N_2}$$

$$E[T_1] = \frac{2}{\alpha_{N_1}} \tilde{\beta}(N)$$

$$\beta(\theta) = + \frac{m}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{m^2 m}{2\sigma^2}$$

$$E[T_2] = \frac{\partial}{\partial n_2} \tilde{\beta}(n)$$

$$= + \frac{\pi}{2} \ln\left(-\frac{2\pi}{2\alpha_2}\right) - \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \alpha_2 m$$

$$= \frac{n}{2} \ln\left(-\frac{\pi}{N_2}\right) - \frac{n}{4} \frac{N_1^2}{N_2}$$

$$(m, \sigma^2) = \left(-\frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_2}, -\frac{1}{2\mathcal{N}_2} \right)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}(\mathcal{N}) &= \frac{m}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{m}{2} \frac{m^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{m}{2} \ln\left(2\pi\left(-\frac{1}{2\mathcal{N}_2}\right)\right) + \frac{m}{2} \frac{\mathcal{N}_1^2}{4\mathcal{N}_2^2} \times (-2\mathcal{N}_2) \\ &= \frac{m}{2} \ln\left(-\pi/\mathcal{N}_2\right) - \frac{m}{4} \frac{\mathcal{N}_1^2}{\mathcal{N}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_1] &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} \tilde{\beta}(\mathcal{N}) = -\frac{m}{\mathcal{N}_2} \times \frac{2\mathcal{N}_1}{4} = +\frac{2m}{4} \frac{m}{\sigma^2} \times (2\sigma^2) \\ &= m \cdot m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_2] &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} \tilde{\beta}(\mathcal{N}) = \frac{m}{2} \times \frac{\cancel{\pi}/\mathcal{N}_2^2}{-\pi/\mathcal{N}_2} + \frac{m}{4} \frac{\mathcal{N}_1^2}{\mathcal{N}_2^2} = -\frac{m}{2\mathcal{N}_2} + \frac{m}{4} \frac{\mathcal{N}_1^2}{\mathcal{N}_2^2} \\ &= -\frac{m}{2} (-2\sigma^2) + \frac{m}{4} \frac{m^2}{\sigma^4} (4\sigma^4) \\ &= m\sigma^2 + m m^2 \sigma^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{cov}(T_1, T_2) &= \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2} \tilde{\beta}(\mathcal{N}) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} \left[-\frac{m}{2\mathcal{N}_2} + \frac{m}{4} \frac{\mathcal{N}_1^2}{\mathcal{N}_2^2} \right] \\ &= \frac{m}{2} \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_2^2} = \frac{m}{2} \frac{m}{\sigma^2} (4\sigma^4) = 2m m \sigma^2\end{aligned}$$

2°. X Hypergéométrique

ici p inconnue

- $X \sim \mathcal{H}(N, m, p)$ où N nombre total de boules
 m nombre de boules dans une poignée
 p proportion de boules gagnantes.

$\Rightarrow$ On a Np boules gagnantes et $Nq = N(1-p)$ perdantes ($Np, Nq \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{P}[X=k] = \frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{m-k}}{C_N^m} \quad k \in \mathbb{I} \underbrace{\max(0, m-Nq)}_{k-} \dots \underbrace{\min(Np, m)}_{k+} \mathbb{I}$$

$N = Np + Nq$ dépend de p

- $\mathcal{U} = \{\mathbb{N}; \mathcal{P}(\mathbb{N}); \{I \sim \mathcal{H}(N, m, p)\}\}$

La mesure est dominée par la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

- sans doute pas exponentielle... $\text{Supp } P_0 = \{0\}$ $\text{Supp } P_N = \{n\}$

$$\mathbb{E}[X] = mp \quad \text{Var } X = \frac{N-m}{N-1} mpq$$

↓
modèle
non c
homogène

3°. X binomiale négative $\mathcal{B}^-(m, p)$

- X est le nombre d'échecs avant le nième succès dans une suite de bernoulli de succès.

$\Rightarrow X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}[X=k] = C_{m+k-1}^{m-1} p^m q^k \quad k \geq 0; p \in (0, 1]; q = 1-p$$

- $\mathbb{E}[X] = \frac{mq}{p} \quad \text{Var } X = \frac{mq}{p^2}$
- X est la somme de m variés géométriques $\mathcal{G}(p)$
- Si $m=1$, $\mathbb{P}[X=k] = q^k p \quad (k \geq 0)$

$$\mathbb{P}[X=k] = \exp[k \ln(1-p) + \ln p] \Rightarrow T(k) = k$$

$$\eta(p) = \ln(1-p)$$

$$\beta(p) = \ln p$$

C'est un modèle exponentiel de stat canonique $T(k) = k$ et de param canonique $\eta(p) = \ln(1-p)$

- si $m \neq 1$?
 $\text{Supp } P_X = \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} k = x \\ p = \theta \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{P}[X=x] = \underbrace{\frac{(m+x-1)!}{(m-1)! x!}}_{h(x)} \exp \left\{ \underbrace{m \ln \theta}_{-\beta(\theta)} + x \underbrace{\ln(1-\theta)}_{T(x)} \right\}$$

- autre def possible

$$\mathbb{P}[X=x] = C_{x-1}^{r-1} p^r q^{x-r} \mathbb{I}_{[x \geq r]}$$

si r et p inconnus $\Rightarrow$ $\notin$ $\mathcal{F}^{\text{lle exp}}$

si r fixe et p connu: $\mathcal{F}^{\text{lle exp}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta(p) = \ln(1-p) \\ T(x) = x \end{array} \right.$$

4°. $X = \varepsilon + Y(1 - \varepsilon)$; $\varepsilon \sim \mathcal{B}(\alpha)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\alpha \in [0,1]$ $\varepsilon \perp Y$

- si $\varepsilon = 1$, $X = 1$
 si $\varepsilon = 0$, $X = Y$
 la densité de X est /

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X)] &= \mathbb{E}[\varphi(X) \mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}}] + \mathbb{E}[\varphi(X) \mathbb{1}_{\{\varepsilon=0\}}] \\ &= \mathbb{E}[\varphi(1) \mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}}] + \mathbb{E}[\varphi(Y) \mathbb{1}_{\{\varepsilon=0\}}] \\ &= \mathbb{E}[\varphi(1)] \mathbb{P}[\varepsilon=1] + \mathbb{E}[\varphi(Y)] \mathbb{P}[\varepsilon=0] \\ &= \varphi(1)\alpha + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{f_X(x) = \alpha \delta_1(x) + (1-\alpha) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}$$

$f_X(x)$ admet une densité / à la mesure $\delta + \lambda$
 où λ mesure de Lebesgue et δ mesure de comptage
 $\Rightarrow$ non exponentiel.

C'est un modèle (de mélange) homogène et démixé mais

$f_X(x)$ ne peut se mettre sous la forme

$$h(x) \times \exp(\langle \alpha(\theta), T(x) \rangle - \beta(\theta)) \quad \text{ici } \alpha = \theta$$