

$X = (X_1, \dots, X_m)$ m -échantillon

Loi sans atome sur $\mathbb{R}$: $\mathbb{P}_P[X=x] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$R(i, X) = \text{card}(\{j / X_j \leq X_i\}) \quad \mathbb{P}_P = \mathbb{P}$$

$$R(X) = (R(1, X), \dots, R(m, X))$$

1°. Rang et ordre ?

$R(i, X)$ est le nombre de var + petites que X_i (ou égales)

Par ex, si $X_1 = 4 \quad X_2 = 1 \quad X_3 = 12 \quad X_4 = 2 \quad X_5 = 10$.

$$\Rightarrow X_{(1)} = X_2 = 1$$

$$X_{(2)} = X_4 = 2$$

$$X_{(3)} = X_1 = 4$$

$$X_{(4)} = X_5 = 10$$

$$X_{(5)} = X_3 = 12$$

$$R = (3, 1, 5, 2, 4) \xrightarrow{\sigma} \sigma$$

$$\xrightarrow{\sigma^{-1}} \sigma^{-1}$$

$$D = (2, 4, 1, 5, 3)$$

$$R(1, X) = 3$$

$$R(2, X) = 1$$

$$R(3, X) = 5$$

$$R(4, X) = 2$$

$$R(5, X) = 4$$

anti-rang D

$$\sigma^{-1} = D$$

On a donc $X_{(R(i, X))} = X_i$ ie $\sigma(i) = R(i, X)$

$\sigma = R$ est la permutation (dépendant de la réalisation x) qui permet de classer les variables X_i

$$X_{(i)} = X_{\sigma(i)}$$

$$2^\circ, \text{ Mg } \forall i=1 \dots m, R(i, X) = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{[X_i - X_j \geq 0]}$$

C'est une conséquence directe de la définition:

Pour chaque j tel que $X_j \leq X_i$, $\mathbb{1}_{[X_i - X_j \geq 0]} = 1$

3°. Mg $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $R(x)$ permutation de $(1, 2, \dots, m)$ $\mathbb{P}_P$ -po

$R(x)$ est une application surjective de $\{1, \dots, m\} = I$ dans I

elle est injectivessi $X_i \neq X_j$, ce qui est acquis par hyp

car la loi est sans atome : $\mathbb{P}_P[X=x] = 0$.

$\Rightarrow R(x)$ permutation sur I $\mathbb{P}_P$ -po.

4°. Noctèle image ?

$$\mathcal{B} = (I, \mathcal{S}(I); \mathbb{P}_R)$$

$\mathbb{P}_R$ est la loi du vecteur R

$$\mathbb{P}_R(\sigma) = \frac{1}{m!} \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_m$$

on peut montrer que $R \perp X$. ou $X_\bullet = (X_{(1)}, \dots, X_{(m)})$

en effet:

$$\text{Par } \perp \text{ des } X_i, \mathbb{P}[X_{\sigma(1)} < \dots < X_{\sigma(m)}] = \frac{1}{m!} \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_m$$

$$[R=\sigma] = [X_{\sigma^{-1}(1)} < \dots < X_{\sigma^{-1}(m)}] \Rightarrow \mathbb{P}[R=\sigma] = \frac{1}{m!}$$

$$\mathbb{P}[X_{(1)} \leq x_1, \dots, X_{(m)} \leq x_m] = \mathbb{P}[\exists \sigma / X_{\sigma(1)} \leq x_1, \dots, X_{\sigma(m)} \leq x_m]$$

$$= \mathbb{P}(\bigcup_{\sigma} [X_{\sigma(1)} \leq x_1] \cap \dots \cap [X_{\sigma(m)} \leq x_m]) = \sum_{\sigma} \mathbb{P}[X_{\sigma(1)} \leq x_1, \dots, X_{\sigma(m)} \leq x_m]$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m [X_{(i)} \leq x_i]\right) = m! \frac{1}{m!} F(x_i) \quad \text{si } x_1 \leq x_2 \leq \dots \quad \text{et } 0 \text{ sinon}$$

enfin, montrons que $R \perp X$.

Soit $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ et $\sigma \in \mathcal{S}_m$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m [X_{(i)} \leq x_i] \cap [R = \sigma]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m [X_{\sigma^{-1}(i)} \leq x_i]\right) = F(x_1) \dots F(x_m) \\ &= \frac{1}{m!} \times m! \frac{1}{m!} F(x_i) \\ &= \mathbb{P}[R = \sigma] \times \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m [X_{(i)} \leq x_i]\right) \end{aligned}$$

#