

1.8.

1°. Estimateur $\hat{\theta}_1$ des moments de θ

On résoud $\hat{m}(\theta) = m(\hat{\theta}_1)$

où $\hat{m}(\theta) = \hat{m}_1(\theta)$ moment empirique d'ordre 1

Moment théorique : $m_1(x) = \frac{\theta}{2} = m(\theta)$

$\hat{m}$ dépend implicitement de θ

$\Rightarrow \theta = 2m_1(x)$

Posons $\hat{\theta}_1 = 2\hat{m}_1 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\hat{\theta}_1 = 2\bar{x}$

• $E[\hat{\theta}_1] = \theta$

$b(\hat{\theta}_1) = E[\hat{\theta}_1] - \theta = 0$

$E Q M(\hat{\theta}_1, \theta) = E[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] = V(\hat{\theta}_1) + b(\hat{\theta}_1)^2$
 $= V(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{n} \theta^2 / 3$

• convergence :

des X_i sont i.i.d. et bornés $\Rightarrow$ sont L^1 et on peut appliquer la loi forte des grands nombres. Aussi L^2 donc on peut appliquer le TCL (th. de la limite centrale).

LFGN: $\lim_{n \rightarrow \infty} p.s. \hat{\theta}_1 = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_1$ fort^t consist

TCL: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\sqrt{n}(\hat{\theta}_1 - \theta)) = \mathcal{N}(0; \theta^2/3)$

$\sqrt{n}(\hat{\theta}_1 - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0; \theta^2/3)$ $\sqrt{n}$ -consist^t

2°. Estimateur du max de vraisemb.

$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{[0, \theta]^n}(x)$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \theta]^n \Leftrightarrow x_i \in [0, \theta] \forall i$
 le modèle d'échantillonnage est paramétrique, dominé par $\mathcal{N}$ (mesure de Lebesgue) sur $\mathbb{R}$, mais pas homogène car le support dépend de θ $\forall x \in [0, \theta]^n$,

$\ln L(x, \theta) = -n \ln \theta \Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta}$
 qui ne s'annule jamais

$\Rightarrow$ il faut faire autrement

• $L(x, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0 \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq \theta]}$

si $x_{(n)} > \theta$, $L(x, \theta) = 0$

si $x_{(n)} < \theta$, $L(x, \theta) = \frac{1}{\theta^n} < \frac{1}{x_{(n)}^n}$

$L(x, x_{(n)}) = \sup_{\theta > 0} L(x, \theta)$ (cf. fig)

$\Rightarrow \hat{\theta}_2 = \max_{i=1}^n x_i = X_{(n)}$

• Déterminons la densité de $X_{(n)}$.

La f.r. est

$F_n(x) = P[X_{(n)} \leq x]$

$= P[X_1 \leq x]^n$

car $[X_{(n)} \leq x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]$

$F_n(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x) + \mathbb{1}_{[\theta, \infty]}(x)$

$\Rightarrow f_n(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x)$

$E[\hat{\theta}_2] = \int_0^\theta x f_n(x) dx = \frac{n\theta}{n+1}$

$b(\theta) = E[\hat{\theta}_2] - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = -\frac{\theta}{n+1}$

$\Rightarrow \hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$

• $E Q M(\hat{\theta}_3, \theta) = V(\hat{\theta}_3) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(X_{(n)})$

$E[X_{(n)}^2] = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^2 \frac{n-1}{n} x^{n-2} dx = \frac{n\theta^2}{n+2}$

$V(\hat{\theta}_3) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left[\frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 \right] = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_3) = 0$

$\Rightarrow \hat{\theta}_3$ convergent et consistant (cv dans $L^2 \Rightarrow$ cv en proba)

3°. Estimateur plug-in

$n = 2m+1 \Rightarrow$ la médiane de X est $X_{(m+1)}$. En outre, comme la densité est symétrique par rapport à $x = \theta/2$, la médiane est $\theta/2 \Rightarrow \hat{\theta}_4 = 2X_{(m+1)}$

• la densité de $X_{(m+1)} = \hat{\theta}_4/2$ est

$g(x) = (m+1) \binom{2m+1}{m+1} f(x) F(x)^m (1-F(x))^m$

$= (m+1) \binom{2m+1}{m+1} \frac{1}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^m \left(1-\frac{x}{\theta}\right)^m \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x)$

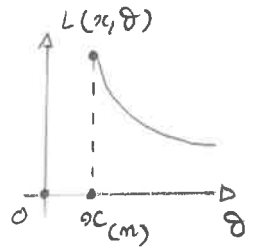
or, $(m+1) \binom{2m+1}{m+1} = \frac{(m+1)(2m+1)!}{(m+1)! m!} = \frac{(2m+1)!}{m!^2}$

$= B(m+1, m+1)^{-1}$
 avec $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$

$E[\hat{\theta}_4] = \theta \times E\left[\frac{1}{\theta} \hat{\theta}_4\right] = \frac{\theta}{B(m+1, m+1)} \int_0^\theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^m \left(1-\frac{x}{\theta}\right)^m \frac{1}{\theta} dx$

$= \theta \frac{B(m+2, m+1)}{B(m+1, m+1)} = \theta$

$\Rightarrow \hat{\theta}_4$ est sans biais



$$\begin{aligned} \text{de } \hat{\theta}_4, \mathbb{E}[\hat{\theta}_4^2] &= \frac{2\theta^2}{B(m+1, m+1)} \int_0^\theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^{m+2} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^m \frac{dx}{\theta} \\ &= \theta^2 \frac{m+2}{2m+3} \\ \mathbb{E}QM(\hat{\theta}_4, \theta) &= V(\hat{\theta}_4) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_4^2] - \hat{\theta}_2^2 = \theta^2 \frac{1}{2m+3} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

en fait, les statistiques d'ordre de la loi uniforme sont les $L(X_{(k)}) = \beta(k, m-k+1)$

4° Meilleur estimateur ?

$\hat{\theta}_2$ est biaisé; $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4$ sont sans biais

$$\mathbb{E}QM(\hat{\theta}_1, \theta) = \frac{1}{n} \frac{\theta^2}{3}$$

$$\mathbb{E}QM(\hat{\theta}_3, \theta) = \frac{1}{n} \frac{\theta^2}{2m+2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \text{ vite}$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_3$ meilleur

5° loi a posteriori

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \mathbb{1}_{]1, \infty[}(\theta)$$

$$\text{vraisemblance } f(x, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0, \theta]^n}(x)$$

$$f_{H/X=x}(\theta) = \frac{f(x, \theta) \pi(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) d\theta} \text{ d'après le th. de Bayes}$$

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int \frac{1}{\theta^{m+2}} \mathbb{1}_{[0, \theta]^m}(x) dx \\ &= \int_{1 \wedge x_{(m)}}^{\infty} d\theta / \theta^{m+2} = \frac{1}{m+1} \frac{1}{(1 \wedge x_{(m)})^{m+1}} \end{aligned}$$

$$\text{car } \mathbb{1}_{[0, \theta]^m} = \mathbb{1}_{[0 \leq x_{(1)} \leq x_{(m)} \leq \theta]}$$

$$a \wedge b = \sup(a, b)$$

$$f_{H/X=x}(\theta, x) = \frac{m+1}{\theta^{m+2}} (1 \wedge x_{(m)})^{m+1} \mathbb{1}_{]1, \theta[}(\theta) \mathbb{1}_{[0, \theta]^m}(x)$$

$$\mathbb{E}[H/X=x] = (m+1) (1 \wedge x_{(m)})^{m+1} \int_{1 \wedge x_{(m)}}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^{m+1}}$$

$$= \frac{m+1}{m} (1 \wedge x_{(m)}) \mathbb{1}_{[x_{(1)} \geq 0]}$$

$$\hat{\theta}_5 = \mathbb{E}[H/X] = \frac{m+1}{m} \sup(1, X_{(m)})$$

• Complément

loi limite de $\hat{\theta}_3$ (qui est m -consist^E)

$$\mathbb{P}[m(\theta - \hat{\theta}_2) \leq t] = \mathbb{P}[m\hat{\theta}_2 \geq m\theta - t]$$

$$= 1 - (1 - \frac{t}{m\theta})^m = 1 - \exp(-\frac{t}{\theta} + o(\frac{t}{m}))$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}[m(\theta - \hat{\theta}_2) \leq t] = 1 - e^{-t/\theta}$$

qui est la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/\theta)$

Ainsi, $m(\theta - \hat{\theta}_2) \rightsquigarrow \mathcal{E}(1/\theta)$

• Par le lemme de Slutsky, on en déduit alors que $\bar{c}_e \hat{\theta}_2 \rightsquigarrow \theta$

$$m(\theta - \hat{\theta}_3) = m(\theta - \hat{\theta}_2) - \hat{\theta}_2 \rightsquigarrow \mathcal{E}(1/\theta) - \theta$$

Slutsky

$$\left\{ \begin{array}{l} X_m \rightsquigarrow x \\ Y_m \rightarrow cte \end{array} \right\} \Rightarrow (X_m, Y_m) \rightsquigarrow (x, cte)$$