STATISTIQUE MATHÉMATIQUE - MS ENSAI 2025-2026
EXERCICE 1.8. CORRIGÉ DE LA FIN

La loi *a priori* π a pour densité $\pi(\theta) = \frac{1}{\theta^2}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(\theta)$. C'est la loi d'une variable aléatoire T dont les réalisations sont les valeurs de θ. La vraisemblance de l'échantillon est

$$L(x|\theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x) \tag{1}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est une observation de l'échantillon. La densité de la loi jointe (X, T) peut alors s'écrire

$$f_{(X,T)}(x,\theta) = L(x|\theta)\pi(\theta) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\theta^{n+2}}\mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x)\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(\theta) \tag{3}$$

D'après le théorème de Bayes, la loi marginale de X a pour densité

$$f_X(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\theta^{n+2}}\mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x)d\theta \tag{4}$$

l'indicatrice sous l'intégrale vaut 1 si tous les x_i sont compris entre 0 et θ et sinon elle vaut 0. Autrement dit, elle vaut 1 si, et seulement si,

$$0 \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le \theta \tag{5}$$

On va donc intégrer soit entre 1 et l'infini si 1 est plus grand que θ, soit entre θ et l'infini. Notons $\sigma = \max(1, \theta)$. On a alors

$$f_X(x) = \int_\sigma^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta^{n+2}} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sigma^{n+1}} \tag{6}$$

On en déduit, d'après la formule de Bayes, la vraisemblance *a posteriori* de θ sachant l'observation x (en notant T la variable aléatoire dont une réalisation est θ) :

$$L(T = \theta | X = x) = \frac{n+1}{\theta^{n+2}}\sigma^{n+1}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(\theta)\mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x) \tag{7}$$

L'estimateur bayésien de la moyenne est alors l'espérance de cette loi *a posteriori* et vaut

$$\mathbb{E}[T|X = x] = (n+1)\sigma^{n+1}\int_\sigma^{+\infty}\frac{d\theta}{\theta^{n+1}} = \frac{n+1}{n}\sigma\mathbb{1}_{[x_{(1)}\ge 0]} \tag{8}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[T|X] = \frac{n+1}{n}\max(1, X_{(n)}) \tag{9}$$