On considère un échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de loi uniforme sur l'intervalle $[\theta,\theta+1]$ où θ est inconnu. On pose :

$$\widehat{\theta}_1 = \overline{X}_n - \frac{1}{2} \tag{1}$$
$$\widehat{\theta}_2 = \min(X_1,\dots,X_n) \tag{2}$$
$$\widehat{\theta}_3 = \max(X_1,\dots,X_n) - 1 \tag{3}$$

1°. Par symétrie, la moyenne théorique de X_i est $\theta + 1/2$ (vous pouvez aussi faire le calcul de l'espérance). La moyenne empirique vaut $\overline{X}$ et l'estimateur des moments est obtenu en identifiant les deux :

$$\overline{X}_n = \widehat{\theta}_1 + \frac{1}{2} \tag{4}$$

par construction il est sans biais car $\mathbb{E}[\overline{X}] = \mathbb{E}[X_i] = \theta + 1/2$ et donc $\mathbb{E}[\widehat{\theta}_1] = \theta$.

Son erreur quadratique est

$$\mathbb{E}[(\widehat{\theta}_1 - \theta)^2] = \mathbb{V}(\widehat{\theta}_1) = \mathbb{V}(\overline{X} - 1/2) = \mathbb{V}(\overline{X}) = \sigma^2/n = \frac{1}{12n}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Comme l'erreur quadratique tend vers 0 avec n, on en déduit que l'estimateur est convergent au sens des moindres carrés (convergence en norme L^2).

La loi forte des grands nombres (LFGN) s'applique car l'échantillon est i.i.d. et possède un moment d'ordre 1 fini :

$$\overline{X} \longrightarrow \theta + 1/2 \text{ p.s.} \tag{5}$$

On applique alors le théorème de l'application continue à $\overline{X}$ avec la fonction $\psi(x) = x - 1/2$. On en déduit que $\psi(\overline{X})$ tend presque sûrement vers $\psi(\theta + 1/2)$, c'est à dire que :

$$\widehat{\theta}_1 \longrightarrow \theta \text{ p.s.} \tag{6}$$

Le théorème de la limite centrale s'applique également car les X_i possèdent un moment d'ordre 2 fini (la variance vaut 1/12). On a donc :

$$\sqrt{n}(\overline{X} - (\theta + 1/2)) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/12) \tag{7}$$

Le symbole $\rightsquigarrow$ indique une convergence en loi lorsque n tend vers l'infini. On applique alors la méthode delta à $\overline{X}$ avec la fonction $\psi(x) = x - 1/2$ qui est clairement dérivable et de dérivée constante égale à 1. Il vient :

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_1 - \psi(\theta)) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/12\psi(\theta)^2) \tag{8}$$
$$\iff \sqrt{n}(\widehat{\theta}_1 - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/12) \tag{9}$$

de sorte que la convergence vers θ se fait à vitesse $\sqrt{n}$.

2°. Si l'on note $F(x)$ la fonction de répartition de n'importe lequel des X_i, on a :

$$\theta = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 0\} \tag{10}$$

En effet, θ est la plus grande valeur réelle à partir de laquelle la fonction de répartition peut prendre une valeur non nulle (faire un dessin pour s'en convaincre). L'estimateur plug-in associé s'obtient en remplaçant la fonction de répartition théorique par la fonction de répartition empirique $F_n(x)$ de l'échantillon :

$$\widehat{\theta}_2 = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) = 0\} \tag{11}$$

avec

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i < x]} \tag{12}$$

Mais cette somme est nulle si, et seulement si, toutes les indicatrices de la somme sont nulles, c'est à dire si tous les X_i sont supérieurs à x. Ceci est équivalent à dire que le minimum des X_i est supérieur à x et donc que

$$\widehat{\theta}_2 = \min(X_1,\dots,X_n) = X_{(1)} \tag{13}$$

$\widehat{\theta}_2$ est donc bien un estimateur plug-in.

3°.

$$\mathbb{P}\left[n(\widehat{\theta}_2 - \theta) \le x\right] = \mathbb{P}\left[\widehat{\theta}_2 \le \theta + x/n\right] \tag{14}$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left[X_i \ge \theta + x/n\right]^n = 1 - (1 - x/n)^n \tag{15}$$

si $0 \le x \le n$. Si $x < 0$ la probabilité vaut 0 et si $x \ge n$ elle vaut 1. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[n(\widehat{\theta}_2 - \theta) \le x\right] = (1 - e^{-x})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \tag{16}$$

On rappelle que $(1 - x/n)^n \to e^{-x}$ pour tout x réel. On reconnait dans la formule précédente la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi,

$$n(\widehat{\theta}_2 - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{E}(1) \tag{17}$$

La vitesse de convergence est en n, ce qui est beaucoup plus rapide que la vitesse classique en $\sqrt{n}$ du théorème de la limite centrale. On parle de super-convergence. Il n'était pas possible ici d'appliquer la LFGN ou le TLC car l'estimateur n'est pas une fonction de la moyenne empirique, mais une statistique d'ordre. Et de fait, la loi limite n'est pas gaussienne.

4°. En reprenant le calcul précédent, on voit facilement que

$$\mathbb{P}\left[\widehat{\theta}_2 \le x\right] = 1 - (1 - x + \theta)^n \tag{18}$$

si $x \in [\theta, \theta+1]$ et 0 dans le cas contraire. La densité de $\widehat{\theta}_2$ est donc la dérivée de la fonction de répartition ci-dessus :

$$f_n(x) = n(1 + \theta - x)^{n-1}\mathbb{1}_{[\theta,\theta+1]}(x) \tag{19}$$

On en déduit (après calculs que vous devez effectuer vous-même) que :

$$\mathbb{E}[\widehat{\theta}_2] = \theta + \frac{1}{n+1} \tag{20}$$

$$\mathbb{E}[\widehat{\theta}_2^2] = \theta^2 + \frac{2\theta}{n+1} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \tag{21}$$

$$\mathbb{V}(\widehat{\theta}_2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} \tag{22}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit alors que :

$$\mathbb{E}[(\widehat{\theta}_2 - \theta_2)^2] = \mathbb{V}(\widehat{\theta}_2) + b(\theta)^2 \to 0 \tag{23}$$

quand n tend vers l'infini. Ceci prouve que la convergence de cet estimateur a lieu également en moyenne quadratique.

5°. Pour $\widehat{\theta}_3$, on utilise la même démarche que dans la question 3°. $\widehat{\theta}_3$ est un estimateur plug-in et l'on a :

$$\widehat{\theta}_3 = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{F}_n(x) = 1\} - 1 \tag{24}$$

La fonction de répartition vaut 1 si, et seulement si, tous les X_i sont plus petits que x donc si, et seulement si, leur maximum est plus petit que x. Ainsi,

$$\widehat{\theta}_3 = \mathrm{X}_{(n)} - 1 \tag{25}$$

De la même façon que dans la question 3°, on voit facilement que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[n(\widehat{\theta}_3 - \theta) \leq x\right] = e^x \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x) \tag{26}$$

et donc $n(\widehat{\theta}_3 - \theta) \rightsquigarrow -\mathscr{E}(1)$ lorsque n tend vers l'infini. La vitesse de convergence est encore en n.

6°. La vraisemblance de l'échantillon peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{L}(x,\theta) = \mathbb{1}_{[\theta \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq \theta+1]} \tag{27}$$

dont la valeur maximale égale à 1 est atteinte si, et seulement si, tous les x_i sont compris entre θ et $\theta+1$. Ceci est équivalent à dire que θ doit être dans l'intervalle $[x_{(n)} - 1; x_{(1)}]$ et toute valeur de cet intervalle est donc un estimateur du maximum de vraisemblance. On en déduit qu'il en existe une infinité. On peut, par exemple, choisir le milieu de l'intervalle comme EMV :

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{MV}} = \frac{1}{2}(\mathrm{X}_{(1)} - \mathrm{X}_{(n)} + 1) \tag{28}$$

Notez bien les lettres minuscules qui indiquent une observation de l'échantillon et les lettres majuscules qui indiquent des variables aléatoires.