

2.7.

1°. Convergence des trois estimateurs

• $\hat{\theta}_1 = e^{-\bar{X}}$; on utilise la loi forte des grands nombres (LFGN):

$$\bar{X} \xrightarrow[p.s.]{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_1] = m = \lambda$$

puis d'après le théorème de l'application continue:

$$\hat{\theta}_1 \xrightarrow[p.s.]{m} e^{-\lambda} = \theta \quad \text{car } \psi(x) = e^{-x} \text{ est c.o.}$$

$$\bullet \hat{\theta}_2 \xrightarrow[p.s.]{m} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[X_1=0]}] = \mathbb{P}[X_1=0] = e^{-\lambda} = \theta$$

d'après la LFGN (des $Y_i = \mathbb{1}_{[X_i=0]}$ sont iid et dans L^1)

$$\bullet \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = \exp\left(m \ln\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) \\ = \exp\left(\frac{1}{m} \times m \ln\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{m}(-1 + o(1))\right)$$

$$\text{or } m \ln\left(1 - \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{m} -1$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \xrightarrow[p.s.]{m} \lambda \quad \text{et la convergence p.s.}$$

$$\text{est stable par } x \text{ donc } \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \xrightarrow[p.s.]{m} \theta$$

$\Rightarrow$ les 3 estimateurs sont fortement convergents.

2°. Calculer $\mathbb{E}[\hat{\theta}_2 / S]$

• $Y = m\hat{\theta}_2$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(m, e^{-\lambda})$ et $S = \sum X_i$ suit une loi de Poisson $\sim \mathcal{P}(m\lambda)$ car somme de n v.a. de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[Y/S = s] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{[X_i=0]} / S = s\right]$$

$$= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[X_i=0]} / S = s]$$

$$= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}[X_i = 0 / S = s]$$

$$= m \mathbb{P}[X_1 = 0 / S = s] \quad \text{car les } X_i \text{ sont iid}$$

$$= m \times \frac{\mathbb{P}[X_1 = 0; S = s]}{\mathbb{P}[S = s]}$$

$$= m \times \frac{\mathbb{P}[X_1 = 0; \sum_{i=2}^m X_i = s]}{\mathbb{P}[S = s]}$$

$$= m \times \mathbb{P}[X_1 = 0] \times \frac{\mathbb{P}[S_{m-1} = s]}{\mathbb{P}[S_m = s]}$$

$$\text{où } S_m \sim \mathcal{P}(m\lambda) \text{ et } S_{m-1} \sim \mathcal{P}((m-1)\lambda)$$

$$\mathbb{E}[Y/S = s] = m \times e^{-\lambda} \times \frac{s!}{e^{-m\lambda} (m\lambda)^s s!} \times \frac{e^{-(m-1)\lambda}}{(m-1)\lambda^s s!}$$

$$= m \left(\frac{m-1}{m}\right)^s$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}_2 / S] = \left(\frac{m-1}{m}\right)^s = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^s = \hat{\theta}_3$$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_2 / S] = \hat{\theta}_3$$

Remarques

• S est une stat exhaustive pour λ et $\hat{\theta}_2$ est une statistique complète (c'est la moyenne empirique d'un échantillon de loi de Bernoulli qui appartient au modèle exponentiel).

Le théorème de Lehmann-Scheffé indique alors que $\mathbb{E}[\hat{\theta}_2 / S]$ est VUBS et $\hat{\theta}_3$ est l'amélioré de Rao-Blackwell de $\hat{\theta}_2$.

• $\hat{\theta}_1$ étant biaisé, on ne peut pas conclure de la même façon.